Einführung in die Quantentheorie

Hausübung, Blatt 5 **SoSe 2015** **Abgabe: 21.05.2015**

[H12] Zerfließen eines Gaußschen Wellenpakets I (4 Punkte)

Die Wellenfunktion eines freien Teilchens mit der Masse m in einer Dimension sei zur Zeit $t = 0$ bekannt als

$$\psi(x, t{=}0) \;=\; (\sigma\pi)^{-\frac{1}{4}} \,\exp\!\big(\mathrm{i}k_0 x - \tfrac{x^2}{2\sigma}\big)\,,$$

wobei k_0 und σ positive reelle Konstanten sind.

(a) Berechnen Sie $\psi(x, t)$, indem Sie nach Eigenzuständen des Hamiltonoperators $H = \frac{P^2}{2m}$ entwickeln.

(b) Bestimmen Sie das Maximum $\big(x_{\mathrm{max}}, w(x_{\mathrm{max}})\big)$ der Wahrscheinlichkeitsdichte $w(x)$ als Funktion der Zeit.

(c) Geben Sie die Breite Δ des Wellenpakets zur Zeit t an.

(d) Diskutieren Sie die Ergebnisse aus (b) und (c) für $t \to \infty$.

[H13] Unschärfen eines Gaußschen Wellenpakets (4 Punkte)

Für $k_0 = 0$ reduziert sich die zeitabhängige Wellenfunktion aus [H12] auf

$$\psi(x, t) \;=\; \Big(\frac{\sigma}{\pi}\Big)^{\frac{1}{4}} \big(\eta(t)\big)^{-\frac{1}{2}} \,\exp\!\Big(-\frac{x^2}{2\eta(t)}\Big) \qquad \text{mit} \quad \eta(t) = \sigma + \mathrm{i}\hbar t/m\,.$$

Stimmt Ihr Resultat für [H12a]? Berechnen Sie als Funktion der Zeit

(a) $\langle X\rangle$, $\langle X^2\rangle$ und ΔX,

(b) $\langle P\rangle$, $\langle P^2\rangle$ und ΔP.

(c) Geben Sie $\Delta P \Delta X$ als Funktion der Zeit an. Bestimmen Sie das Minimum.

[H14] Zerfließen eines Gaußschen Wellenpakets II (2 Punkte)

Für $k_0 = 0$ vereinfacht sich die Anfangs-Wellenfunktion aus [H12] zu

$$\psi(x, t{=}0) \;=\; (\sigma\pi)^{-\frac{1}{4}} \,\exp\!\big(-\tfrac{x^2}{2\sigma}\big)\,.$$

Die Zeitentwicklung $\psi(x, t)$ soll alternativ bestimmt werden mit Hilfe von

$$\langle x|U(t)|y\rangle \;=\; \langle x|e^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}tH}|y\rangle \;=\; \delta(x-y)\,\exp\!\Big(\frac{\mathrm{i}\hbar t}{2m}\partial_y^2\Big)\,.$$

Benutzen Sie hierzu die Identität

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\alpha\,\partial_z^2}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}z^2} \;=\; (1{+}\alpha)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}z^2/(1+\alpha)}\,.$$

2 Sonderpunkte:
Können Sie diese Identität beweisen, indem Sie eine Differentialgleichung für die linke Seite herleiten und diese lösen?